

Mecánica Clásica III

Tema 1. Formalismo hamiltoniano.

Notas de clase da materia Mecánica Clásica III do Grao en Física da USC
Curso 2025-2026. Versión 1.1 - Setembro 2025

José M. Sánchez de Santos
Departamento de Física de Partículas
Facultade de Física
USC

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Formalismo hamiltoniano | 2 |
| 1.1. Ecuacións canónicas | 2 |
| 1.1.1. Transformacións de Legendre e función hamiltoniana | 2 |
| 1.1.2. Ecuacións canónicas | 4 |
| 1.1.3. Exemplos | 5 |
| 1.1.4. As ecuacións canónicas e o principio variacional | 6 |
| 1.1.5. Ecuacións canónicas en forma matricial. Forma simpléctica. | 7 |
| 1.2. Transformacións canónicas | 8 |
| 1.2.1. Función xeratriz | 9 |
| 1.2.2. Exemplos de transformacións canónicas | 11 |
| 1.2.3. Transformacións canónicas en forma matricial. Condición de canonicidade | 13 |
| 1.3. Corchetes de Poisson | 15 |
| 1.3.1. Definición e propiedades | 15 |
| 1.3.2. Corchetes de Poisson en forma matricial | 16 |
| 1.3.3. Invarianza canónica dos corchetes de Poisson | 16 |
| 1.3.4. Evolución temporal e leis de conservación | 17 |
| 1.3.5. Transformacións canónicas infinitesimais. Teorema de Noether | 18 |
| 1.3.6. Cuantización canónica (Dirac) | 21 |
| 1.4. Teoría de Hamilton-Jacobi | 22 |
| 1.4.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi | 22 |
| 1.4.2. Separación de variables | 24 |
| 1.4.3. Exemplo: HJ para unha partícula en caída libre | 26 |
| 1.4.4. Integrabilidade. Teorema de Liouville-Arnold | 27 |
| Agradecementos | 28 |
| Bibliografía | 29 |

Tema 1

Formalismo hamiltoniano

1.1. Ecuacións canónicas

O formalismo hamiltoniano é dun gran valor pola súa potencia e elegancia, fornecendo o fundamento para extensións teóricas da Física, tanto dentro da Mecánica Clásica (Teoría de Hamilton-Jacobi, Teoría canónica das perturbacións, Caos, etc.) como doutras ramas da Física (Mecánica Estatística, Mecánica Cuántica). As primeiras seccións son as mesmas que no capítulo 6 dos apuntes de Mecánica Clásica II e servennos de repaso e introdución ao formalismo hamiltoniano ou canónico.

1.1.1. Transformacións de Legendre e función hamiltoniana

Definamos o que se coñece matematicamente como unha transformación de Legendre. Sexa unha función $f = f(x_j, y_j, t)$, $j = 1, \dots, n$ e consideremos a súa diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right) = w dt + \sum_j (u_j dx_j + v_j dy_j), \quad (1.1)$$

onde $u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $v_j = \frac{\partial f}{\partial y_j}$, $w = \frac{\partial f}{\partial t}$ e (x_j, u_j) , (y_j, v_j) , (t, w) son parellas de variables conxugadas. O obxecto da transformación de Legendre é construír unha nova función a partir de f na que parte das variables independentes, por exemplo as x_j , substitúense polas súas conxugadas. Sexa esta nova función:

$$g = \sum_j u_j x_j - f \quad (1.2)$$

e escribamos a súa diferencial:

$$\begin{aligned}
 dg &= \sum_j (u_j dx_j + x_j du_j) - df = \\
 &= \sum_j (u_j dx_j + x_j du_j) - \sum_j (u_j dx_j + v_j dy_j) - w dt = \\
 &= \sum_j (x_j du_j - v_j dy_j) - w dt,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

de xeito que $g = g(u_j, y_j, t)$ con

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = x_j, \quad \frac{\partial g}{\partial y_j} = -v_j, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -w. \tag{1.4}$$

As variables x_j e y_j son agora funcións das variables independentes u_j e y_j segundo as ecuacións anteriores.

Á función g chámasele a *transformada de Legendre de f* .

As transformacións de Legendre úsanse en Termodinámica para construír uns potenciais termodinámicos a partir doutros. Por exemplo, a enerxía interna U é unha función da entropía e do volume $U = U(S, V)$, $dU = TdS - pdV$, de xeito que $\frac{\partial U}{\partial S} = T$ e $\frac{\partial U}{\partial V} = -p$. A entalpía H obtense mediante unha transformación de Legendre respecto ás variables conxugadas (V, p) : $H = H(S, p) = U + pV$, con $\frac{\partial H}{\partial S} = T$ e $\frac{\partial H}{\partial p} = V$. Analogamente pódense definir a enerxía libre de Helmholtz $F(T, V) = U - TS$ e a enerxía libre de Gibbs $G(T, p) = H - TS$.

En Mecánica facemos unha transformación de Legendre para pasar das variables \dot{q}_j ás súas conxugadas p_j , e da función Lagrangiana $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ á *función hamiltoniana* ou *hamiltoniana*:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L, \tag{1.5}$$

onde

$$H = H(q_j, p_j, t) \tag{1.6}$$

é unha función das coordenadas e os momentos, que pasan a ser variables independentes que xogan un papel equivalente. Hai unha coordenada e un momento por cada grao de liberdade. O espazo de $2n$ dimensións expandido polas q_j e p_j chámase *espazo de fases* e xogará un papel importante en Mecánica Estatística, oscilacións non lineares, etc. O movemento dun punto neste espazo estará determinado polas ecuacións de Hamilton ou ecuacións canónicas.

A definición da hamiltoniana é a mesma que a *función de Jacobi h* , pero é importante distinguir de que variables depende cada unha delas. En

H , a transformación de Legendre fai que toda a dependencia nas velocidades \dot{q}_j sexa substituída pola dependencia nos momentos p_j . Na práctica o procedemento para obter a hamiltoniana é o seguinte: as ecuacións

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.7)$$

definen os momentos como funcións das velocidades:

$$p_j = p_j(q_j, \dot{q}_j, t). \quad (1.8)$$

Se supoñemos que deste sistema de ecuacións se poden despxear as velocidades:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j, t), \quad (1.9)$$

a hamiltoniana obtense substituíndo esta expresión na definición:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(q_j, p_j, t) - L(q_j, \dot{q}_j(q_j, p_j, t), t). \quad (1.10)$$

1.1.2. Ecuacións canónicas

Calculemos a diferencial de H considerando que $H = H(q_j, p_j, t)$:

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (1.11)$$

Ademais, partindo da definición $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$ temos que:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_j \left(p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (1.12)$$

xa que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$. Usando as ecuacións de Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j$, obtemos que

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.13)$$

e comparando:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.14)$$

que son as *ecuacións de Hamilton* ou *ecuacións canónicas*. Ademais temos que, usando estas ecuacións:

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.15)$$

e, dividindo por dt :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j (\dot{q}_j \dot{p}_j - \dot{p}_j \dot{q}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} : \quad (1.16)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.17)$$

A función hamiltoniana ten a característica especial de que a súa dependencia total no tempo é igual á explícita, e por iso cando H non depende explicitamente do tempo (e polo tanto L tampouco) é automaticamente unha constante do movemento. Máis adiante veremos que isto non é casualidade e que a hamiltoniana satisfai estas propiedades porque é a función que xera a evolución temporal. Ademais, cando a lagrangiana é cuadrática nas velocidades, a hamiltoniana coincide coa enerxía total do sistema e pode calcularse doadamente expresando esta última en función das coordenadas e os momentos.

1.1.3. Exemplos

Partícula nun potencial central

Unha partícula que se move nun potencial central que só depende da distancia á orixe ten unha lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r) \quad (1.18)$$

en coordenadas esféricas. Os momentos canónicos conxugados son:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (1.19)$$

relacións que se poden inverter para obter as velocidades:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}. \quad (1.20)$$

Sostituíndo estas expresións na definición $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$ obtemos a hamiltoniana da partícula no potencial central:

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r). \quad (1.21)$$

Esta hamiltoniana é unha constante do movemento xa que non depende explicitamente de t . Ademais, o seu valor coincide co da enerxía total, xa que L é cuadrática nas velocidades.

En coordenadas esféricas, a simetría baixo rotacións é explícita e reflíctese no feito de que existen coordenadas angulares que son cíclicas. Malia iso, en coordenadas cartesianas:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (1.22)$$

e non hai ningunha coordenada cíclica, aínda que a simetría é, evidentemente, a mesma e o momento angular unha constante do movemento.

Partícula cargada nun campo electromagnético

A lagrangiana é:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q\Phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (1.23)$$

e o momento:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m}. \quad (1.24)$$

Entón,

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m \left(\frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m} \right)^2 + q\Phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\Phi. \quad (1.25)$$

Neste exemplo vemos que $H = T + V$, onde V é a parte conservativa do potencial (a que non depende da velocidade). H consérvase xa que non depende explicitamente do tempo, pero non coincide coa enerxía, que contén tamén a parte do potencial dependente da velocidade: $H = T + V \neq E = T + U$. Isto é debido a que a lagrangiana non é cuadrática na velocidade. A enerxía total non se conserva.

1.1.4. As ecuacións canónicas e o principio variacional

As ecuacións canónicas poden obterse tamén, por suposto, dun principio variacional. Na obtención das ecuacións de Lagrange considerabamos traxectorias no espazo de configuración n -dimensional. Agora debemos considerar a acción como un funcional no espazo de fases de $2n$ dimensións e expresala en función da hamiltoniana da seguinte forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right], \quad (1.26)$$

onde $q_j(t)$ varíase coa condición de contorno $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ (non é necesario impoñer tal condición explícitamente nos p_j , como veremos máis abaixo).

Se facemos as variacións de xeito análogo ao caso lagrangiano:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] = 0. \quad (1.27)$$

Integrando por partes o termo en $\delta \dot{q}_j$ e tendo en conta que os termos de fronteira se anulan:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[-\dot{p}_j \delta q_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[-\left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

e se as q_j e as p_j se consideran independentes, isto condúcenos ás ecuacións de Hamilton:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (1.29)$$

En realidade non sería necesario considerar as p_j como independentes, pois os coeficientes de δp_j son identicamente nulos polas ecuacións da transformación de Legendre, e de feito virían fixados polos δq_j , pero isto non altera o resultado de que as ecuacións canónicas son consecuencia do mesmo principio variacional que as Lagrange e polo tanto equivalentes a elas.

1.1.5. Ecuacións canónicas en forma matricial. Forma simpléctica.

Para o sistema con n graos de liberdade temos $2n$ variables canónicas. Definimos o vector \vec{x} de xeito que $x_i = q_i$, $x_{n+i} = p_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. \vec{x} é un vector no *espazo de fases* de $2n$ dimensións:

$$\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p}) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \quad (1.30)$$

O gradiente neste espazo:

$$\vec{\nabla}_x F = \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \quad (1.31)$$

para calquera función $F(\vec{x}) = F(\vec{q}, \vec{p})$ ven daquela dado por:

$$\left(\vec{\nabla}_x F\right)_i = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}\right)_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad (1.32)$$

$$\left(\vec{\nabla}_x F\right)_{n+i} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}\right)_{n+i} = \frac{\partial F}{\partial x_{n+i}} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.33)$$

As ecuacións canónicas escribíranse entón como:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbb{J} \cdot \vec{\nabla}_x H = \mathbb{J} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}, \quad (1.34)$$

ou, en compoñentes:

$$\dot{x}_a = J_{ab} \frac{\partial H}{\partial x_b}; \quad a, b = 1, \dots, 2n, \quad (1.35)$$

onde J_{ij} son as compoñentes de \mathbb{J} , que é a matriz da *forma simpléctica*:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n \times n} \\ -\mathbb{I}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

A forma simpléctica \mathbb{J} satisfai as seguintes propiedades:

$$\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}, \quad (1.37)$$

$$\mathbb{J}^\top \cdot \mathbb{J} = \mathbb{J} \cdot \mathbb{J}^\top = \mathbb{I} \quad (\text{ortogonalidade}), \quad (1.38)$$

$$\mathbb{J}^\top = -\mathbb{J} \quad (\text{antisimetría}), \quad (1.39)$$

$$\det \mathbb{J} = 1. \quad (1.40)$$

1.2. Transformacións canónicas

Sabemos dos cursos anteriores que cando unha coordenada é cíclica o seu momento canónico conxugado é unha constante do movemento. Supoñamos que temos un sistema mecánico onde todas as coordenadas son cíclicas, $H = H(p_i)$, e todos os momentos son constantes $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, $p_i = \alpha_i$. Se H non depende do tempo $H = H(\alpha_i)$ e é unha constante do movemento. O resto de ecuacións canónicas serán: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i$, onde as ω_i son todas constantes. A solución é trivial: $q_i = \omega_i t + \beta_i$.

Raramente atoparemos un sistema así, pero tamén sabemos que existen moitas posibles eleccións de coordenadas xeneralizadas e algunha destas eleccións pode conter máis coordenadas cíclicas que outras. Por exemplo: para unha partícula movéndose nun campo de forzas centrais no plano, en coordenadas cartesianas: $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2})$, mentras que en polares: $H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + V(r)$. Ambas eleccións son igual de válidas, pero en cartesianas ningunha coordenada é cíclica, mentras que en polares éo θ , polo que o momento angular $l = p_\theta$ consérvase e podemos reducir o problema a un problema unidimensional resoluble polo método da enerxía.

Unha estratexia sería dispoñer dun método para transformar as coordenadas a un sistema no que o maior número posible delas fosen cíclicas ou idealmente o foran todas. Isto levaranos ás transformacións canónicas e o método de Hamilton-Jacobi.

No formalismo lagrangiano temos n coordenadas xeneralizadas e podemos considerar transformacións do tipo:

$$Q_i = Q_i(q, t), \quad (1.41)$$

como poden ser os cambios de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas ou esféricas. Estas transformacións son *transformacións puntuais* no espazo de configuracións de n dimensións. As transformacións puntuais deixan invariantes as ecuacións de Lagrange, é dicir: se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (1.42)$$

entón:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0. \quad (1.43)$$

Na formulación hamiltoniana temos $2n$ variables independentes (q_i, p_i) (ademais de t) e podemos considerar transformacións máis xerais:

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad (1.44)$$

$$P_i = P_i(q, p, t), \quad (1.45)$$

que son *transformacións no espazo de fases*. Sen embargo, non toda transformación no espazo de fases preserva as ecuacións de hamilton; só algunhas delas, as *transformacións canónicas*:

Definición: Unha transformación no espazo de fases: $Q_i = Q_i(q, p, t)$, $P_i = P_i(q, p, t)$ é unha *transformación canónica* se existe unha función $K(Q, P, t)$ tal que as ecuacións do movemento nas novas variables sexan:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad (1.46)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (1.47)$$

A función K é a *hamiltoniana transformada*. Na sección seguinte imos caracterizar unha transformación canónica mediante o que imos definir como *función xeratriz*.

1.2.1. Función xeratriz

Vimos nas seccións anteriores que as ecuacións canónicas se poden deducir do principio variacional $\delta S = 0$ onde S é a acción de Hamilton (1.26). Para unha transformación canónica, nas novas variables teremos:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right] = 0. \quad (1.48)$$

É suficiente que os integrandos destes dous principios variacionais difiran na derivada total dunha función $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, xa que se

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (1.49)$$

entón

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF}{dt} = \delta [F(t_2) - F(t_1)] = 0, \quad (1.50)$$

dado que as traxectorias son tales que $\delta q_i = \delta p_i = \delta Q_i = \delta P_i = 0$ nos instantes inicial e final.

Á función $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ chámasele *función xeratriz da transformación canónica*. F é unha función das $4n + 1$ variables (q_i, p_i, Q_i, P_i, t) , pero só $2n + 1$ delas son independentes, xa que temos as $2n$ ecuacións (1.44). En xeral haberá moitos xeitos de elixir esas $2n$ variables independentes. Especialmente interesantes son os seguintes catro casos:

$$F = F_1(q, Q, t), \quad (1.51)$$

$$F = F_2(q, P, t), \quad (1.52)$$

$$F = F_3(p, Q, t), \quad (1.53)$$

$$F = F_4(p, P, t), \quad (1.54)$$

aínda que existen outras opcións.

Vexamos como a función xeratriz determina a transformación canónica. Sexa o primeiro dos casos anteriores: $F = F_1(q, Q, t)$:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}, \quad (1.55)$$

pero:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (1.56)$$

polo que:

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \left(-P_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i - H + K - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \quad (1.57)$$

e, dado que se elixiron as q_i, Q_i como variables independentes, podemos igualar termo a termo:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (1.58)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (1.59)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (1.60)$$

Destas ecuacións obtemos a forma explícita da transformación: de (1.58), $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}(q, Q, t)$, podemos despxear $Q_i(q, p, t)$. Substituíndo este resultado en (1.59), $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}(q, Q, t)$ obtemos $P_i(q, p, t)$. Finalmente, a hamiltoniana transformada ven dada por (1.60), tras expresar as velas variables en función das novas (dando por suposto que a transformación é invertible):

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q(Q, P, t), Q, t). \quad (1.61)$$

Algunhas veces non é axeitado ou non é posible atopar unha función xeratriz de tipo F_1 . Os outros tipos de funcións xeratrices obtéñense a partir dunha dada mediante transformacións de Legendre, coma as da sección 1.1.1. Por exemplo, a partir de F_1 podemos obter unha F_2 facendo

$$F_2 = F_1 + \sum_i Q_i P_i = F_1 - \sum_i Q_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (1.62)$$

onde temos que substituír todas as $Q_i = Q_i(q, P, t)$ usando as ecuacións da transformación. De aquí:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt} - \sum_i Q_i \dot{P}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i. \quad (1.63)$$

Os termos $\sum_i P_i \dot{Q}_i$ canceláanse, polo que, igualando termo a termo obtemos agora:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (1.64)$$

De xeito análogo podemos obter as ecuacións de transformación para os outros tipos de funcións xeratrices, F_3 e F_4 , o que deixamos como exercicio. Para uso posterior resumimos os resultados, omitindo subíndices e sumatorios para maior simplicidade e claridade:

$$F_1(q, Q, t); \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}. \quad (1.65)$$

$$F_2 = F_1 + QP; \quad F_2(q, P, t); \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}. \quad (1.66)$$

$$F_3 = F_1 - qp; \quad F_3(p, Q, t); \quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}. \quad (1.67)$$

$$F_4 = F_1 - qp + QP; \quad F_4(p, P, t); \quad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}. \quad (1.68)$$

Ademais:

$$K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad (1.69)$$

en todos os casos, $i = 1, 2, 3, 4$.

1.2.2. Exemplos de transformacións canónicas

1. $F_1 = \sum_i q_i Q_i$.

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i, \quad (1.70)$$

que é a transformación que permuta coordenadas e momentos.

2. $F_2 = \sum_i q_i P_i$.

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \quad (1.71)$$

que é a transformación identidade.

3. $F_2 = \sum_i f_i(q, t) P_i$.

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t), \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} P_j. \quad (1.72)$$

A primeira ecuación dinos que se trata dunha transformación puntual. Toda transformación puntual é, polo tanto, canónica, sempre que os momentos se transformen de acordo coa segunda ecuación.

4. Oscilador harmónico.

Para o oscilador harmónico unidimensional, a hamiltoniana é:

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2). \quad (1.73)$$

H consérvase ao non depender de t e coincide coa enerxía total E . Sendo H cuadrática en q e p , isto suxire que pode existir unha transformación canónica tal que a nova coordenada sexa cíclica, de xeito similar ao que sucede co cambio de cartesianas a polares no caso de forzas centrais. Supoñamos entón unha transformación da forma:

$$m\omega q = f(P) \operatorname{sen} Q, \quad (1.74)$$

$$p = f(P) \cos Q. \quad (1.75)$$

Deste xeito a hamiltoniana transformada sería:

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \frac{1}{2m}f^2(P) \quad (1.76)$$

e Q sería cíclica. Para que a transformación sexa canónica debe existir unha función xeratriz. Eliximos como variables independentes q e Q e procuramos unha F_1 . De (1.74), (1.75) temos que $p = m\omega q \cot Q$. A primeira das ecuacións de transformación:

$$p = m\omega q \cot Q = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad (1.77)$$

intégrase doadamente para obter:

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q + g(Q), \quad (1.78)$$

onde $g(Q)$ é unha constante de integración que non depende de q . Da segunda das ecuacións de transformación:

$$-P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 Q}, \quad (1.79)$$

onde puxemos $g'(Q) = g(Q) = 0$ sen perder xeralidade ao tratarse dunha constante aditiva irrelevante. Despexando:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q, \quad (1.80)$$

polo que

$$f(P) = \sqrt{2Pm\omega} \quad (1.81)$$

e a transformación queda finalmente:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q, \quad (1.82)$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \quad (1.83)$$

e na hamiltoniana transformada non aparece Q :

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = E = \omega P. \quad (1.84)$$

A transformación inversa é:

$$Q = \arctan\left(m\omega\frac{q}{p}\right) \quad (1.85)$$

$$P = \frac{1}{2m\omega}(p^2 + m^2\omega^2q^2). \quad (1.86)$$

Nas novas variables as ecuacións canónicas son triviais:

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cte} = \frac{E}{\omega} \quad (1.87)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \alpha, \quad (1.88)$$

onde α é unha constante de integración. Tendo en conta que a enerxía total depende cuadráticamente da amplitude da oscilación A , $E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$, e desfazendo a transformación canónica ás variables orixinais, a solución final é:

$$q(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.89)$$

$$p(t) = Am\omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.90)$$

1.2.3. Transformacións canónicas en forma matricial. Condición de canonicidade

Na sección 1.1.5 vimos que as ecuacións canónicas podían escribirse en forma matricial definindo vectores con $2n$ compoñentes no espazo fase: $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$, ecuacións (1.34), (1.35). Consideremos unha transformación canónica *independente do tempo*:

$$Q_i = Q_i(q, p), \quad (1.91)$$

$$P_i = P_i(q, p) \quad (1.92)$$

e definimos $\vec{y} = (\vec{Q}, \vec{P})$ de xeito que a transformación pode escribirse $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, $y_a = y_a(\vec{x})$. Derivando con respecto ao tempo (usamos o convenio de Einstein):

$$\dot{y}_a = M_{ab}\dot{x}_b; \quad a, b = 1, \dots, 2n, \quad (1.93)$$

onde os M_{ij} son os elementos da matriz jacobiana \mathbf{M} :

$$M_{ab} = \frac{\partial y_a}{\partial x_b}. \quad (1.94)$$

Como x_b son variables canónicas:

$$\dot{y}_a = M_{ab}\dot{x}_b = M_{ab}J_{bc}\frac{\partial H}{\partial x_c}, \quad (1.95)$$

pero como a transformación é independente do tempo temos que $H(\vec{x}) = K(\vec{y}(\vec{x}))$, polo que utilizando a regra da cadea:

$$\frac{\partial H}{\partial x_c} = \frac{\partial K}{\partial y_d} \frac{\partial y_d}{\partial x_c} = \frac{\partial K}{\partial y_d} M_{dc}. \quad (1.96)$$

Substituíndo en (1.95):

$$\dot{y}_a = M_{ab} \dot{x}_b = M_{ab} J_{bc} M_{dc} \frac{\partial K}{\partial y_d} = M_{ab} J_{bc} M_{cd}^\top \frac{\partial K}{\partial y_d}. \quad (1.97)$$

Se a transformación é canónica, ten que ser:

$$M_{ab} J_{bc} M_{cd}^\top = J_{ad}, \quad (1.98)$$

ou ben:

$$\frac{\partial y_a}{\partial x_b} J_{bc} \frac{\partial y_d}{\partial x_c} = J_{ad}, \quad (1.99)$$

que en forma matricial escríbese:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{M}^\top = \mathbb{J}. \quad (1.100)$$

Esta é a condición necesaria e suficiente para que unha transformación independente do tempo sexa canónica (*condición simpléctica*). Se \mathbf{M} verifica dita condición dise que é unha *matriz simpléctica*. Unha matriz simpléctica é unha matriz ortogonal que deixa invariante a forma simpléctica \mathbb{J} .

A condición simpléctica (1.98), (1.100) é tamén a condición necesaria e suficiente de canonicidade no caso de que a transformación sexa dependente do tempo. Non imos dar aquí a demostración, que pode atoparse, por exemplo, no libro de Goldstein [1].

Exemplo

A transformación (1.85) que utilizamos no exemplo do oscilador harmónico ten a matriz jacobiana:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{p}{q^2 + p^2} & \frac{-q}{q^2 + p^2} \\ q & p \end{pmatrix}, \quad (1.101)$$

que satisfai a condición simpléctica. Para a transformación inversa (1.82) temos:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2P} \cos Q & \frac{1}{\sqrt{2P}} \operatorname{sen} Q \\ -\sqrt{2P} \operatorname{sen} Q & \frac{1}{\sqrt{2P}} \cos Q \end{pmatrix}, \quad (1.102)$$

que tamén a satisfai.

Teorema:

As transformacións canónicas forman un *grupo*:

- A transformación identidade é canónica.
- Se unha transformación é canónica, tamén o é a súa inversa.
- Dúas transformacións canónicas sucesivas (operación produto) definen unha nova transformación canónica.
- A operación produto é asociativa.

1.3. Corchetes de Poisson

1.3.1. Definición e propiedades

Nesta sección imos introducir unha descrición da Mecánica Clásica que é formalmente idéntica á da Mecánica Cuántica, o que nos vai permitir a transición dunha teoría á outra.

Sexan F e G dúas funcións do espazo fase (e o tempo): $F(q_i, p_i, t)$, $G(q_i, p_i, t)$. Definimos unha nova función no espazo fase mediante o *corchete de Poisson*:

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (1.103)$$

O corchete de Poisson ten as seguintes propiedades:

- Antisimetría:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}. \quad (1.104)$$

- Bilinearidade:

$$\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}. \quad (1.105)$$

$$\{A, \beta B + \gamma C\} = \beta\{A, B\} + \gamma\{A, C\}. \quad (1.106)$$

- Regra de Leibnitz

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B. \quad (1.107)$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}. \quad (1.108)$$

- Identidade de Jacobi:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0. \quad (1.109)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0. \quad (1.110)$$

A identidade de Jacobi substitúe á propiedade asociativa, que non é satisfeita polos corchetes de Poisson:

$$\{A, \{B, C\}\} \neq \{\{A, B\}, C\}. \quad (1.111)$$

As propiedades anteriores fan do corchete de Poisson un *produto de Lie*. O espazo vectorial das funcións no espazo de fases xunto con este produto é unha *álgebra de Lie*, como tamén o é, por exemplo o espazo de matrices $n \times n$ ($GL(n)$) coa operación conmutación: $[A, B] = AB - BA$, ou o espazo de operadores sobre un espazo de Hilbert coa mesma operación.

Casos particulares son os corchetes de Poisson fundamentais:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad (1.112)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (1.113)$$

ou aqueles de funcións arbitrarias coas variables canónicas:

$$\{q_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (1.114)$$

$$\{p_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \quad (1.115)$$

1.3.2. Corchetes de Poisson en forma matricial

No caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \left(\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial q} \\ \frac{\partial G}{\partial p} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_a} J_{ab} \frac{\partial G}{\partial x_b}, \quad a, b = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Esta expresión é válida tamén $\forall n$, polo que podemos escribir:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x_a} J_{ab} \frac{\partial G}{\partial x_b}, \quad a, b = 1, \dots, 2n, \quad (1.117)$$

ou en forma de matrices:

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \right)^\top \cdot \mathbb{J} \cdot \frac{\partial G}{\partial \vec{x}} = \left(\vec{\nabla}_x F \right)^\top \cdot \mathbb{J} \cdot \left(\vec{\nabla}_x G \right). \quad (1.118)$$

Os corchetes fundamentais poden poñerse como:

$$\{x_a, x_b\} = J_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, 2n, \quad (1.119)$$

ou en forma matricial:

$$\{\vec{x} \otimes \vec{x}\} = \mathbb{J}. \quad (1.120)$$

1.3.3. Invarianza canónica dos corchetes de Poisson

Teorema. *Unha transformación no espazo de fases é canónica se e só se deixa invariantes os corchetes de Poisson fundamentais.*

Demostración:

Sexa a transformación canónica $y_a = y_a(\vec{x})$. Para os corchetes de Poisson fundamentais temos:

$$\{y_a, y_b\}_x = \frac{\partial y_a}{\partial x_c} J_{cd} \frac{\partial y_b}{\partial x_d} = M_{ac} J_{cd} M_{bd} = J_{ab} = \{y_a y_b\}_y, \quad (1.121)$$

onde temos usado que a transformación é canónica e a propiedade simpléctica da matriz jacobiana. A demostración é válida nos dous sentidos. ■

De feito:

Teorema. *Os corchetes de Poisson son invariantes baixo transformacións canónicas.*

Demostración:

$$\begin{aligned} \{F, G\}_x &= \frac{\partial F}{\partial x_a} J_{ab} \frac{\partial G}{\partial x_b} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y_c} \frac{\partial y_c}{\partial x_a} J_{ab} \frac{\partial G}{\partial y_d} \frac{\partial y_d}{\partial x_b} = \frac{\partial F}{\partial y_c} M_{ca} J_{ab} M_{db} \frac{\partial G}{\partial y_d} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y_c} J_{cd} \frac{\partial G}{\partial y_d} = \{F, G\}_y \end{aligned} \quad (1.122)$$

1.3.4. Evolución temporal e leis de conservación

Para unha función calquera $F(q, p, t)$ do espazo de fases e o tempo. Ao longo das traxectorias, F depende de t como $F(t) = F[q_i(t), p_i(t), t]$, a súa derivada total respecto do tempo é:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right], \quad (1.123)$$

onde H é a Hamiltoniana e usamos as ecuacións canónicas. Recoñecemos no segundo membro o corchete de Poisson, polo que a derivada de F se pode escribir:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \quad (1.124)$$

e por iso se di que H é a función que xenera a evolución temporal. Por exemplo, para $F = q_i$, $F = p_i$:

$$\dot{q}_i = \sum_j \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = \sum_j \delta_{ij} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.125)$$

$$\dot{p}_i = \sum_j \left[\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = - \sum_j \delta_{ij} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.126)$$

respectivamente, que son as ecuacións canónicas. Neste formalismo é doado establecer condicións *suficientes* para que unha magnitude calquera F sexa

unha constante do movemento: calquera función que non dependa do tempo explicitamente é unha constante do movemento se ten corchete nulo coa hamiltoniana: $\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \{F, H\}$ o polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \\ \{F, H\} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dF}{dt} = 0 \quad (1.127)$$

Ademais, e dado que $\{H, H\} = 0$ identicamente, entón:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH}{dt} = 0. \quad (1.128)$$

Teorema. (*Teorema de Poisson*) *Se dúas funcións F, G son constantes do movemento, o seu corchete de Poisson $\{F, G\}$ é unha constante do movemento.*

Demostración:

Se $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0$ tamén $\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} = 0$. A demostración consiste simplemente en usar a identidade de Jacobi. Como $\{F, H\} = \{G, H\} = 0$, temos:

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = \{\{F, G\}, H\} = 0, \quad (1.129)$$

e polo tanto:

$$\frac{d}{dt}\{F, G\} = 0. \quad (1.130)$$

No caso máis xeral, no que $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ ou $\frac{\partial G}{\partial t} \neq 0$ deixamos a demostración como exercicio. ■

O conxunto de cantidades conservadas cerra baixo os corchetes a *álgebra de simetría do sistema*.

1.3.5. Transformacións canónicas infinitesimais. Teorema de Noether

Consideremos unha transformación canónica próxima á transformación identidade:

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad (1.131)$$

$$P_i = p_i + \delta p_i, \quad (1.132)$$

con $\delta q_i, \delta p_i$ infinitesimais. A función xeratriz ten que ser próxima á que xera a identidade:

$$F_2(q, P) = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(q, P), \quad (1.133)$$

con ϵ infinitesimal. As ecuacións de transformación son:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \Rightarrow \delta p_i = P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (1.134)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \Rightarrow \delta q_i = Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} + O(\epsilon^2). \quad (1.135)$$

Sexa unha función U do espazo fase independente de t . Baixo unha transformación canónica infinitesimal como a anterior:

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial U}{\partial q_i} \epsilon \left(\frac{\partial G}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial p_i} \left(-\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \right] = \\ &= \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \\ &= \epsilon \{U, G\}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

$$\delta U = \epsilon \{U, G\}. \quad (1.137)$$

No caso particular $U = H$:

$$\delta H = \epsilon \{H, G\}. \quad (1.138)$$

Se G non depende explícitamente do tempo, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$:

$$\frac{dG}{dt} = 0 \Leftrightarrow \{H, G\} = 0 \Leftrightarrow \delta H = 0 : \quad (1.139)$$

G deixa invariante a hamiltoniana e xera unha simetría. Aparece de novo o teorema de Noether, esta vez en forma hamiltoniana:

$$[\text{Lei de conservación}] \Leftrightarrow [\text{Simetría}]. \quad (1.140)$$

Exemplo: translacións espaciais Sexa un sistema dunha partícula e a transformación canónica infinitesimal xerada pola compoñente do momento na dirección dun vector unitario constante \vec{a} :

$$\vec{G} = \vec{a} \cdot \vec{P}. \quad (1.141)$$

Neste caso:

$$\delta \vec{r} = \epsilon \frac{\partial G}{\partial \vec{P}} = \epsilon \vec{a}, \quad (1.142)$$

$$\delta \vec{p} = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial \vec{q}} = 0. \quad (1.143)$$

A transformación é unha translación constante infinitesimal na dirección do vector \vec{a} xenerada polo momento en dita dirección.

$$\delta H|_{trasl} = \epsilon\{H, G\} = \epsilon\{H, \vec{a} \cdot \vec{P}\} = \epsilon\{H, \vec{a} \cdot \vec{p}\} + O(\epsilon^2). \quad (1.144)$$

$$\delta H|_{trasl} = 0 \Leftrightarrow \{H, \vec{a} \cdot \vec{p}\} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{p} = \text{cte}, \quad (1.145)$$

que é a equivalencia entre a invariancia baixo translacións e a conservación do momento linear.

Exemplo: rotacións Sexa agora $G = xP_y - yP_x$, vexamos que transformación xera.

$$\delta x = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_x} = -\epsilon y \Rightarrow X = x - \epsilon y, \quad (1.146)$$

$$\delta y = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_y} = \epsilon x \Rightarrow Y = y + \epsilon x, \quad (1.147)$$

$$\delta z = 0 \Rightarrow Z = z. \quad (1.148)$$

En forma matricial vemos que a transformación é a versión infinitesimal dunha rotación de ángulo ϵ arredor do eixo Z :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\text{sen } \epsilon & 0 \\ \text{sen } \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.149)$$

As compoñentes do momento transfórmanse exactamente do mesmo xeito, como corresponde a un vector:

$$\delta p_x = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial x} = -\epsilon P_y \approx -\epsilon p_y + \dots \Rightarrow P_x = p_x - \epsilon p_y \quad (1.150)$$

$$\delta p_y = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial y} = \epsilon P_x \approx \epsilon p_x + \dots \Rightarrow P_y = p_y + \epsilon p_x \quad (1.151)$$

$$\delta z = 0 \Rightarrow P_z = p_z. \quad (1.152)$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\text{sen } \epsilon & 0 \\ \text{sen } \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (1.153)$$

A variación da hamiltoniana baixo esta rotación infinitesimal é: $\delta H|_{rot} = \epsilon\{H, G\}$, pero $G = xP_y - yP_x = xp_y - yp_x + O(\epsilon) = L_z$, a compoñente z do momento angular.

$$\delta H|_{rot} = 0 \Leftrightarrow \{H, L_z\} = 0 \Leftrightarrow L_z = \text{cte}, \quad (1.154)$$

que é a equivalencia entre a invariancia baixo rotacións e a conservación do momento angular.

Exemplo: translacións temporais.

Sexa $G = H$.

$$\delta\vec{r} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \epsilon \dot{\vec{r}} = \epsilon \frac{\vec{r}(t + \epsilon) - \vec{r}(t)}{\epsilon} = \vec{r}(t + \epsilon) - \vec{r}(t) \quad (1.155)$$

$$\delta\vec{p} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \epsilon \dot{\vec{p}} = \epsilon \frac{\vec{p}(t + \epsilon) - \vec{p}(t)}{\epsilon} = \vec{p}(t + \epsilon) - \vec{p}(t), \quad (1.156)$$

onde utilizamos as ecuacións canónicas e a definición da derivada respecto do tempo. A hamiltoniana H é daquela a xeneradora das translacións infinitesimais no tempo, a evolución temporal e

$$\delta H|_{tt} = 0 \Leftrightarrow \{H, H\} = 0. \quad (1.157)$$

Isto representa a variación de H ao evolucionar (q, p) pero non a posible variación explícita de H , xa que t non cambia na transformación canónica. Dito doutro xeito, toda a dependencia temporal de H é a explícita:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}. \quad (1.158)$$

A transformación que leva ao sistema dun instante t a outro instante posterior $t + \epsilon$ é unha transformación canónica. Unha transformación canónica finita será unha sucesión de transformacións infinitesimais, polo que concluimos que a evolución temporal é canónica e que está garantido que un sistema hamiltoniano permanece hamiltoniano ao longo da súa evolución temporal.

1.3.6. Cuantización canónica (Dirac)

O formalismo que vimos de estudar permite facer a transición da Mecánica Clásica á Mecánica Cuántica de acordo coas seguintes regras (*cuantización canónica*, Dirac, 1926):

1. As funcións do espazo de fases F substitúense por operadores \hat{F} nun espazo de Hilbert.
2. Os corchetes de Poisson substitúense polo conmutador de operadores do seguinte xeito:

$$i\hbar\{F, G\} \longrightarrow [\hat{F}, \hat{G}]. \quad (1.159)$$

Por exemplo, para unha partícula nunha dimensión, a coordenada x e o momento p serán cuanticamente operadores no espazo de funcións de onda (regra 1.):

$$x \longrightarrow \hat{X} \mid \hat{X}\psi(x) = x\psi(x) \quad (1.160)$$

$$p \longrightarrow \hat{P} \mid \hat{P}\psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x). \quad (1.161)$$

Entón, o conmutador $[\hat{X}, \hat{P}]$ será:

$$\begin{aligned}
[\hat{X}, \hat{P}]\psi(x) &= \hat{X}(\hat{P}\psi(x)) - \hat{P}(\hat{X}\psi(x)) = \\
&= x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) + i\hbar \frac{d}{dx} (x\psi(x)) = \\
&= -i\hbar x \frac{d}{dx} \psi(x) + i\hbar \psi(x) + i\hbar x \frac{d}{dx} \psi(x) = \\
&= i\hbar \psi(x),
\end{aligned} \tag{1.162}$$

polo que podemos escribir:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar, \tag{1.163}$$

de acordo coa regra 2.

Se a partícula se move nun potencial $V(x)$ a hamiltoniana H pasa a ser un operador \hat{H} :

$$\begin{aligned}
H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \longrightarrow \hat{H}\psi(x) &= \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) + V(\hat{X}) \right] \psi(x) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x).
\end{aligned} \tag{1.164}$$

A hamiltoniana H consérvase e o seu valor é o da enerxía $H = E$:

$$H = E \longrightarrow \hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{1.165}$$

que é a ecuación de Schrödinger nunha dimensión.

1.4. Teoría de Hamilton-Jacobi

1.4.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Vimos de entender que as transformacións canónicas poden servir para ter un método xeral de resolución de problemas, facendo, por exemplo, que as novas coordenadas canónicas sexan todas elas cíclicas. Podemos ir aínda máis alá e buscar transformacións onde a hamiltoniana transformada sexa nula:

$$K = 0, \tag{1.166}$$

xa que daquela:

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0 \Rightarrow Q_i = \beta_i = \text{cte}, \tag{1.167}$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i = \text{cte}, \tag{1.168}$$

E podemos fixar estes valores constantes como, por exemplo, os valores iniciais das coordenadas e os momentos.

$$Q_i = q_{i0} = q_i(t = 0), \quad P_i = p_{i0} = p_i(t = 0). \quad (1.169)$$

Deste xeito, invertindo a transformación canónica, que non sería máis que a evolución temporal, obtemos a solución:

$$\left. \begin{array}{l} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_i = q_i(Q, P, t) \\ p_i = p_i(Q, P, t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_i = q_i(q_0, p_0, t) \\ p_i = p_i(q_0, p_0, t) \end{array} \right. \quad (1.170)$$

Sexa F a función xeratriz da transformación canónica desexada con $K = 0$, a cal debe satisfacer:

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (1.171)$$

A idea de Jacobi foi elixir F do tipo $F_2(q, P, t)$, con ecuacións de transformación:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad (1.172)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \quad (1.173)$$

Denotemos $S = F_2$ (non por casualidade) e chamaremos *función principal de Hamilton*, á solución da ecuación:

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1.174)$$

que é a ecuación de Hamilton-Jacobi. Dita solución será función das coordenadas e de n constantes de integración independentes α_i , $i = 1, \dots, n$:

$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ (en realidade habería $n + 1$ constantes, pero unha delas será unha constante aditiva global, que é irrelevante: $S \rightarrow S + \alpha$). Identificamos entón as constantes α_i como os valores dos P_i que aparecen na F_2 , todos eles constantes:

$$P_i = \alpha_i. \quad (1.175)$$

Usando as ecuacións de transformación e que as novas coordenadas son constantes $Q_i = \beta_i$ (xa que $K = 0$):

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (1.176)$$

de onde despexamos as coordenadas orixinais en función do tempo e un conxunto de constantes de integración: $q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t)$.

En conclusión, a función principal de Hamilton $S(q, t)$ é a función xeratriz dunha transformación canónica que leva a coordenadas e momentos constantes. Matematicamente, o conxunto de $2n$ ecuacións canónicas de primeira

orde substitúese por unha soa ecuación en derivadas parciais de primeira orde.

A función principal de Hamilton ten, ademais un significado físico. A derivada total respecto do tempo é:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (1.177)$$

Dado que $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ e que S é solución da ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum_i p_i \dot{q}_i = L, \quad (1.178)$$

e podemos escribir:

$$S = \int_0^t L dt, \quad (1.179)$$

polo que poderíamos interpretar S como a acción. Sen embargo, esta función principal non é exactamente a acción de Hamilton que temos estudado, xa que depende do tempo t e tamén dos valores das coordenadas en dito instante $q_i(t)$. A función principal de Hamilton é a *acción dependente das coordenadas*.

1.4.2. Separación de variables

O método habitual para resolver a ecuación de Hamilton-Jacobi é o de separación de variables.

Separación da variable temporal:

No caso de que a hamiltoniana non dependa do tempo, $H = h = \text{cte}$ e podemos separar a variable t , para o cal definimos $W(q)$ tal que:

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - ht. \quad (1.180)$$

Entón $\frac{\partial S}{\partial t} = -H = -h$, $\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$, e a ecuación de Hamilton-Jacobi é agora:

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = h = \text{cte}. \quad (1.181)$$

Esta ecuación xa non depende do tempo. O valor constante da hamiltoniana h é normalmente a enerxía: $H = h = E$. W chámase *función característica de Hamilton* e xera unha transformación canónica distinta á que xera S .

Efectivamente, consideremos a transformación canónica que fai cíclicas todas as coordenadas, $K = K(P_i)$. Todos os momentos conxugados son constantes: $P_i = \alpha_i$. Se a transformación é independente do tempo, tamén o

será a súa función xeratriz (por exemplo de tipo F_2) e $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H = h$, e polo tanto:

$$H(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}) = h = \text{cte}, \quad (1.182)$$

que é a mesma ecuación que satisfai W (1.181). A hamiltoniana transformada non é agora nula, senón constante, polo que as \dot{Q}_i tomarán tamén valores constantes ν_i (que dependerán das α_i), sendo inmediata a integración das ecuacións canónicas:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \nu_i. \quad (1.183)$$

Das ecuacións da transformación canónica poderemos despxear as variables orixinais e obter a solución:

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(q_i, \alpha_i) = \nu_i t + \beta_i \Rightarrow q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t). \quad (1.184)$$

Ademais, W ten significado físico, xa que temos:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i \Rightarrow W = \int dt \sum_i p_i \dot{q}_i, \quad (1.185)$$

que é a chamada *acción de Maupertuis*, o obxecto relevante nun principio variacional alternativo ao principio de Hamilton tal como o coñecemos: o *principio de mínima acción ou principio de Maupertuis (1744)*.

Separación dunha coordenada cíclica:

Sexa q_1 unha coordenada cíclica. A ecuación de Hamilton-Jacobi independente do tempo será:

$$H(q_2, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = h, \quad (1.186)$$

e separamos $W(q_1, \dots, q_n) = W_1(q_1) + W'(q_2, \dots, q_n)$. Ao ser q_1 cíclica, o seu momento conxugado é constante: $\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 = \gamma_1 = \text{cte} \Rightarrow W_1 = \gamma_1 q_1$, é dicir:

$$W(q_1, \dots, q_n) = \gamma_1 q_1 + W'(q_2, \dots, q_n), \quad (1.187)$$

e o problema redúcese a outro cunha coordenada menos:

$$H(q_2, \dots, q_n, (\gamma_1), \frac{\partial W'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}) = h, \quad (1.188)$$

Toda coordenada cíclica é, polo tanto, separable.

Sistemas completamente separables:

Dirase que a ecuación de Hamilton-Jacobi é *totalmente separable* se

$$S(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_i S_i(q_i, t). \quad (1.189)$$

Este é o caso cando a hamiltoniana se separa como $H = \sum_i H_i(q_i, p_i)$, xa que daquela a ecuación de HJ tamén se separa:

$$\sum_i \left(\frac{\partial S_i}{\partial t} + H_i \right) = 0. \quad (1.190)$$

Como cada termo depende só dunha das q_i , pode separarse t en cada S_i :

$$S_i(q_i, t) = W_i(q_i) - h_i t \Rightarrow \sum_i \left[-h_i + H_i \left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) \right] = 0. \quad (1.191)$$

As constantes h_i chámanse *constantes de separación* e o sistema desacópase en n ecuacións de primeira orde (redúcese a cuadraturas):

$$H_i \left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) = h_i, \quad (1.192)$$

onde as constantes de separación satisfan que $\sum_i h_i = H = h$.

1.4.3. Exemplo: HJ para unha partícula en caída libre

Consideremos unha partícula movéndose sobre a liña vertical sometida a un campo gravitatorio constante g . A hamiltoniana é:

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgy \quad (1.193)$$

e a ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy = 0. \quad (1.194)$$

Separamos variables: $S(y, t) = S_0(t) + W(y)$, de onde

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -h; \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + mgy = h, \quad (1.195)$$

onde h é o valor constante de H , é dicir, a enerxía: $h = H = E$. Integrando obtense:

$$\begin{aligned} S_0(t) &= -Et; \quad W = \int dy \sqrt{2m(E - mgy)} \Rightarrow \\ \Rightarrow S(y, h = E, t) &= -Et + \int dy \sqrt{2m(E - mgy)}. \end{aligned} \quad (1.196)$$

Unha vez resolta a ecuación e obtida a función principal de Hamilton, a solución obtense das ecuacións da transformación canónica:

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta = \text{cte.} \quad (1.197)$$

Dado que a hamiltoniana é constante (E) e depende só de constantes temos que $\frac{\partial E}{\partial \alpha}$ tamén é unha constante. Entón:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \beta = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial E} = \beta' = \text{cte}, \quad (1.198)$$

polo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \beta' = -t + \int dy \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - mgy)}}, \quad (1.199)$$

de onde, integrando e despexando:

$$y = -\frac{1}{2}g(t + \beta')^2 + \frac{E}{mg} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0, \quad (1.200)$$

sendo $v_0 = -g\beta'$ e $y_0 = \frac{E}{mg} - \frac{1}{2}g\beta'^2$.

1.4.4. Integrabilidade. Teorema de Liouville-Arnold

Definición: Un sistema hamiltoniano conservativo con n graos de liberdade chámase *completamente integrable* ou *integrable* se existen n cantidades conservadas independentes en involución, é dicir, existen F_i , $i = 1, \dots, n$ tales que:

$$\text{a) } \{F_i, H\} = 0, \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.201)$$

$$\text{b) } \{F_i, F_j\} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (1.202)$$

$$\text{c) } \text{Os vectores } \nabla F_i \text{ son linearmente independentes en cada punto do espazo fase.} \quad (1.203)$$

Teorema (Liouville-Arnold): Sexa un sistema hamiltoniano integrable con n graos de liberdade e hamiltoniana $H(q_i, p_i)$. Entón:

a) Existen variables canónicas $(\phi_1, \dots, \phi_n, J_1, \dots, J_n)$ en función das cales $H = H(J_1, \dots, J_n)$ e as ecuacións do movemento son;

$$J_i = c_i \text{ (ctes)}, \quad (1.204)$$

$$\phi_i = \omega_i t + \phi_i(0) \quad (1.205)$$

$$(\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i \text{ (ctes)}) \quad (1.206)$$

b) As ecuacións de Hamilton nas variables orixinais poden resolverse por *cadraturas* (ou sexa, separando variables e integrando).

c) Se o conxunto de superficies de nivel das constantes do movemento, $\mathcal{M} = \{(q_i, p_i) | F_i(q, p) = c_i, i = 1, \dots, n\}$ é compacto e conexo (ou máis sinxelamente, se as órbitas son acotadas), entón as variables canónicas (J_i, ϕ_i) poden elixirse como *variables acción-ángulo* e o sistema é multiperíodico con frecuencias ω_i .

Demostración: Sen demostración. Ver, por exemplo, o libro de Arnold.

Exemplos:

- Partícula nunha dimensión nun potencial: $V(x)$, $n = 1$, $F_1 = H$.
- Partícula en 3 dimensións nun potencial central: $n = 3$ e o conxunto de constantes en involución é $(F_1, F_2, F_3) = (H, \vec{L}^2, L_z)$. As restantes compoñentes do momento angular están en involución coa hamiltoniana, pero non entre si ou con L_z .
- Problema dos dous corpos con forza mutua central. Neste caso $n = 6$ e $(F_1, \dots, F_6) = (P_x, P_y, P_z, H, \vec{L}^2, L_z)$, onde \vec{L} é o momento angular relativo e P_x, P_y, P_z as compoñentes do momento linear do centro de masas.
- O corpo ríxido libre, $n = 6$, $(F_1, \dots, F_6) = (P_x, P_y, P_z, H, \vec{L}^2, L_z)$.
- Calquera sistema con n graos de liberdade con ecuación de Hamilton-Jacobi completamente separable: $F_i = P_i = \text{cte}$. $\{P_i, P_j\} = 0$.
- O problema de 3 corpos ten $n = 9$, pero só 6 constantes en involución, as mesmas que para o problema de 2 corpos.

Exemplo: Sexa o sistema de dous osciladores acoplados:

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(q_1 - q_2)^2. \quad (1.207)$$

Este sistema é integrable con:

$$F_1 = \frac{1}{4m}(p_1 + p_2)^2 + \frac{1}{4}m\omega_0^2(q_1 + q_2)^2 \quad (1.208)$$

$$F_2 = \frac{1}{4m}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{4}m(\omega_0^2 + 2\omega^2)(q_1 - q_2)^2. \quad (1.209)$$

Introducimos variables canónicas (ϕ_i, J_i) de xeito que:

$$H = F_1 + F_2 = \omega_0 J_1 + \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega^2} J_2, \quad (1.210)$$

co cal:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \omega_0 = \omega_1; \quad \phi_1 = \omega_0 t + \beta_1 \quad (1.211)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega^2} = \omega_2; \quad \phi_2 = (\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega^2})t + \beta_2. \quad (1.212)$$

Se $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ para $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, as órbitas péchanse e o movemento é periódico.

Agradecementos

Quero dar as grazas ao alumnado de Mecánica Clásica III polos seus comentarios e suxestións, especialmente a Alejandro Mata Ali e Víctor López Pardo pola súa detallada lectura do texto.

Bibliografía

- [1] GOLDSTEIN, H., POOLE, C. e SAFKO, J., *Classical Mechanics*, terceira edición, Addison-Wesley, 2001.
- [2] GREGORY, R.D., *Classical Mechanics*, Cambridge University Press, 2006.
- [3] GREINER, W., *Classical Mechanics. Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2010.
- [4] SCHECK, F., *Mechanics*, Springer, 2010.
- [5] LEMOS, N.A., *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, 2018.
- [6] ARNOLD, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989.